

# Uma abordagem simplificada do processo de reconstrução de imagens médicas por Tomografia Computadorizada

Adriano De Cezaro\*, e Douglas Chielle†

16 de Setembro de 2009

## 1 Introdução

O problema essencial da tomografia é o da determinação da estrutura interna de um meio usando resultados de medidas de radiação que o atravessa. Desconsiderando-se as interações entre os fótons e os efeitos de espalhamento, a solução matemática do problema é devido a J. Radon em 1917 [1, 2]. A ideia básica deste procedimento é a seguinte: Suponha que o raio-X seja direcionado através de  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ao longo da reta  $\xi$  (veja Fig. 1). Sejam  $p_0$  e  $p$  as intensidades do raio-X antes e depois de penetrarem em  $\Omega$ . Enquanto o raio-X percorre uma distância  $\Delta x$ , ao longo de  $\xi$ , este sofre uma perda de intensidade  $\Delta p$  devido ao coeficiente de absorção  $f(x)$ . Fisicamente, esse modelo pode ser descrito como

$$\frac{\Delta p}{p} = -f(x)\Delta x. \quad (1)$$

Supondo  $\Delta p$  e  $\Delta x$  infinitesimais e integrando de ambos os lados da equação (1), sobre a reta  $\xi$  obtemos

$$p = p_0 \exp\left(-\int_{\xi} f(x)dx\right) := \mathcal{R}(f(x)). \quad (2)$$

A equação (2) é chamada de Transformada de Radon.

Uma das aplicação de (2) é a identificação de uma anomalia num tecido do corpo humano. Sabe-se que tais anomalias geram diferenças na densidade do tecido e em consequencia, no coeficiente de absorção. Assim, inferir medidas dos coeficiente é equivalente a determinar

---

\*IMEF - FURG, [adrianocezaro@furg.br](mailto:adrianocezaro@furg.br)

†Bach. Mat. Aplicada - FURG [douglas.chielle@gmail.com](mailto:douglas.chielle@gmail.com)

a presença de algo estranho no tecido. No entanto, tais medidas dos coeficiente são dados de maneira indireta, i.e., sabemos apenas o valor de sua integral de linha ao longo da reta percorrida pelo raio-X. Veja equação (2). Ainda, é impossível obter informações sobre todas as retas, pois, os detectores estão espalhados de forma discreta em torno de  $\Omega$ .

O problema que estudamos no presente trabalho trata da obtenção do coeficiente de absorção  $f$  a partir de um conjunto de intensidades  $p$ . Tais problemas são conhecidos como *problemas inversos* [2].

## 2 Metodologia

Nossa análise se baseia num modelo discreto da equação (2). Neste, um conjunto  $j = 1, \dots, N$  de pixels com intensidade  $f_j$  deve ser determinada. Veja figura 1. Esse processo gera um sistema de equações lineares da forma

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j = p_i \quad i = 1, \dots, M, \quad (3)$$

onde  $A = (a_{ij})$  é uma matriz de pesos,  $p = (p_1, \dots, p_M)^T$  é o vetor de medidas da intensidade e  $f = (f_1, \dots, f_N)^T$  determina os coeficientes de absorção de cada pixel. Os coeficientes  $a_{ij}$  são dados pela relação (ver figura 1)

$$a_{ij} = \frac{\text{área iluminada do pixel } j \text{ pelo raio } i}{\text{área total do pixel } j}.$$

Uma análise preliminar diria que a solução de (3) é  $f = A^{-1}p$ . Mas, tipicamente, o sistema (3) possui uma matriz  $A$  singular, ou então, não quadrada ( $N \neq M$ ). Isto é, o problema é mal posto [3]. Ainda, em aplicações reais, a matriz  $A$  é muito grande, implicando em intensa demanda computacional em processos diretos de inversão.

Neste trabalho, comparamos soluções do sistema linear (3) utilizando dois métodos: Método dos Quadrados Mínimos (MQM) que consiste em encontrar  $f$  que minimize o funcional  $G(f) = \|Af - p\|^2$  que equivale a

$$f = A^\dagger p, \quad (4)$$

onde  $A^\dagger$  é a pseudo inversa da matriz  $A$  [2, 3]. O outro é o ART [4]. Este é um método iterativo de solução. Geometricamente, ART é um método de projeções ortogonais sucessivas de uma linha do sistema linear (3) na seguinte e de uma maneira ciclica.

Faremos dois testes numéricos. Num utilizamos a matriz  $A$  e vetor de medidas de radiação  $p$  de acordo com a figura 1. No outro teste utilizamos a matriz de Hilbert  $H_4$  [3] de ordem 4

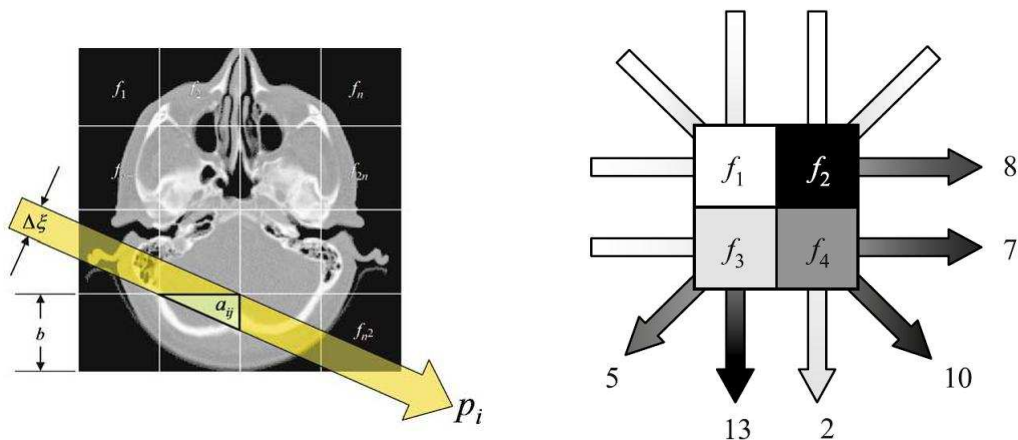


Figura 1: A esquerda o processo de construção dos coeficientes  $a_{ij}$ . A direita, reconstrução para uma imagem com 4 pixels.

e o vetor  $p = (4.25, 2.7667, 2.0833, 1.6786)^T$ . O teste com a matriz  $H_4$  exemplifica os efeitos do mal condicionamento no problema de tomografia. Testes que incluem erros nas medidas de  $p$ , com nível de erros  $\delta$ , também foram considerados, pois são comuns nas aplicações práticas [2, 1]. A implementação do algoritmo ART e a solução da equação (4) foram feitos no software MATLAB. Os resultados estão dispostos na Tabela abaixo.

### 3 Resultados e Discussão

Na Tabela abaixo, apresentamos alguns resultados dos testes feitos para ambas as matrizes e respectivos dados  $p$ , como na Seção 2, e para dados com erros

$p^\delta = (5.002, 12.008, 2.002, 10.002, 6.006, 8.002)^T$  e  $p^\delta = (4.25, 2.76, 2.08, 1.67)^T$ , respectivamente.

Observamos que, para dados sem erros, a reconstrução de  $f$  usando (4) é muito boa e a solução  $f$  é recuperada exatamente. O mesmo acontece com o ART no caso da matriz  $A$ . Para o caso da matriz  $H_4$ , ART não apresenta a solução exata mesmo no caso  $\delta = 0$ . Isso ocorre porque, o vetor  $p$  é dado de entrada do usuário e, por conseguinte, este não usa todas as casas decimais de precisão, acarretando "erros" nos dados. Por outro lado, no caso de erro nos dados ( $\delta > 0$ ) e o sistema mal condicionado (caso da matriz  $H_4$ ) o algoritmo ART se mostrou estável, enquanto que o processo de inversão obteve valores muito distantes da solução do problema. Isso é efeito do mal condicionamento de  $H_4$ .

Matriz	$n^0$ condição	$f$ por (4) $\delta = 0$	$f$ por (4) $\delta > 0$	$f$ por ART $\delta = 0$	$f$ por ART $\delta > 0$
A	1.7321	$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.83 \\ 0.33 \\ 4.33 \\ 1.83 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.83 \\ 0.16 \\ 4.17 \\ 1.83 \end{pmatrix}$
$H_4$	$1.5514e^{+004}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.2 \\ -8.4 \\ 32.4 \\ -18.2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0154 \\ 4.8432 \\ 0.3576 \\ 2.7757 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9293 \\ 5.1956 \\ 0.5788 \\ 2.1147 \end{pmatrix}$

## 4 Conclusões

Neste trabalho, comparamos dois testes para a recuperação de  $f$  no problema de tomografia computadorizada. Verificamos que, para dados reais, i.e., para dados com erros, o algoritmo ART é mais estável e, portanto, fornece soluções mais confiáveis. Já, o método (MQM) não é confiável e necessita de ajustes.

## Referências

- [1] T.M. Buzug, *Computer tomography: From photon statistical to modern cone-beam ct*, Springer, Berlin, 2008.
- [2] A. De Cezaro and Leitao A., *Introdução aos problemas inversos lineares*, IV Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, SBM, Maringá, 2008, pp. iii + 79.
- [3] C. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.
- [4] Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, PWS Publishing Company, Boston, 1996.